

APLIKASI MODEL MATEMATIKA $k-\epsilon$ UNTUK PREDIKSI DISTRIBUSI SEDIMEN SUSPENSI DALAM SALURAN TERBUKA

Bambang Agus Kironoto*)

INTISARI

Model matematika " $k-\epsilon$ " yang dikembangkan untuk memprediksi struktur aliran turbulen dalam saluran terbuka, diterapkan untuk memprediksi distribusi dari konsentrasi sedimen suspensi. Model matematika " $k-\epsilon$ " merupakan suatu model yang menyelesaikan secara numeris persamaan-persamaan pembentuk dari aliran (yaitu, persamaan momentum, kontinuitas dan persamaan transpor), dengan bantuan suatu persamaan pendukung, yaitu yang menyatakan hubungan antara energi kinetik turbulen (*turbulent kinetic energy*), k , dengan energi disipasi (*rate of dissipation*), ϵ .

Dengan menggunakan model matematika " $k-\epsilon$ ", dan input data berupa data debit aliran per satuan lebar, kedalaman, kemiringan, dan kekasaran dasar saluran, struktur aliran turbulen seperti misalnya distribusi kecepatan, viskositas turbulen (*eddy viscosity*), dan tegangan geser Reynolds (*Reynolds shear stress*) dapat diperoleh. Dengan menganggap bahwa *turbulent diffusivity* proporsional dengan *eddy viscosity*, distribusi dari sedimen suspensi dapat ditentukan. Perbandingan antara data pengukuran laboratorium dengan hasil hitungan dari model matematika " $k-\epsilon$ " cukup memuaskan.

PENDAHULUAN

Pada pekerjaan-pekerjaan keteknikan dari berbagai aspek seperti misalnya pekerjaan perancangan bangunan-bangunan pengendalian sungai, pengendalian banjir, perencanaan saluran stabil, bangunan-bangunan pengambilan, dll, informasi tentang transpor sedimen sering sangat diperlukan. Sedimentasi pada sungai-sungai aluvial seperti erosi, transportasi, deposisi dan pemadatan sedimen, merupakan proses-proses yang sangat kompleks, karena banyaknya parameter yang saling berkaitan, baik parameter aliran maupun parameter sedimen itu sendiri. Dengan adanya proses transpor sedimen, konfigurasi dasar sering menjadi tidak teratur dan bergelombang (*ripple, dunes, dll.*).

Berdasarkan mekanisme transpornya, transpor sedimen, pada prinsipnya dapat dibedakan sebagai transpor muatan dasar (*bed-load*) dan transpor muatan suspensi (*suspended load*). Muatan dasar bergerak pada dasar mengikuti arus, sedangkan muatan suspensi bergerak secara melayang, terangkut dalam bentuk suspensi, dan gerakannya sangat dipengaruhi oleh gerak dari turbulensi aliran.

Pengetahuan tentang konsentrasi dari sedimen suspensi dalam saluran terbuka sangat penting untuk menangani sejumlah masalah teknik sungai maupun teknik lingkungan. Permasalahan-permasalahan seperti penentuan tempat-tempat pengambilan air (*water intakes*), perencanaan waduk, dan prediksi transpor polutan pada sedimen suspensi adalah beberapa contoh permasalahan yang berkaitan dengan sedimen suspensi.

Dengan pertimbangan bahwa karakteristik dari sedimen suspensi sangat berkaitan dengan turbulensi aliran, dalam tulisan ini, suatu model untuk aliran turbulen, yaitu model matematika " $k-\epsilon$ " akan dipergunakan sebagai dasar untuk memprediksi distribusi dari konsentrasi sedimen suspensi. Model

matematika " $k-\epsilon$ ", pertama kali dikembangkan pada aliran lapis batas (*boundary layers flow*) oleh Launder dan Spalding (1974). Dengan beberapa modifikasi, model matematika " $k-\epsilon$ " dapat dipergunakan untuk memprediksi struktur aliran turbulen dalam saluran terbuka (aliran tanpa sedimen) dengan sangat memuaskan (Krishnappan, 1984, Kironoto, 1994). Dalam tulisan ini data pengukuran laboratorium akan dipergunakan untuk membandingkan hasil hitungan yang diperoleh dari model matematik " $k-\epsilon$ ".

LANDASAN TEORI

Persamaan dasar

Pada prinsipnya model matematika, " $k-\epsilon$ ", tersusun oleh dua parameter dasar, yaitu parameter energi kinetik turbulen (*kinetic energy of turbulent*), k , dan energi disipasi (*rate of dissipation*), ϵ , dimana keduanya saling berkaitan, menurut persamaan (Launder dan Spalding, 1974):

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad 1)$$

dimana v_t adalah viskositas turbulen (*eddy viscosity*), dan C_μ adalah suatu angka konstan empirik.

Untuk aliran dua dimensi, model turbulen " $k-\epsilon$ " ini didasarkan pada persamaan-persamaan (Krishnappan, 1984):

persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad 2)$$

persamaan momentum

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (u v) = \frac{\partial}{\partial y} (v_t \frac{\partial u}{\partial y}) + g_{so} - g \frac{dD}{dx} \quad 3)$$

*) Dr. Ir. Bambang Agus Kironoto, Dosen Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik UGM.

persamaan transport

$$\frac{\partial}{\partial x} (u k) + \frac{\partial}{\partial y} (v k) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + G - \epsilon \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (u \epsilon) + \frac{\partial}{\partial y} (v \epsilon) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + C_1 \frac{\epsilon}{k} G - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad (5)$$

dengan

$$G = v_t \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (6)$$

u dan v dalam persamaan tersebut di atas, masing-masing adalah kecepatan pada arah longitudinal dan vertikal, D adalah kedalaman aliran, S_0 , kemiringan dasar saluran dan G , energi produksi turbulen.

Harga-harga konstanta empiris dalam persamaan-persamaan di atas adalah, $C_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1.00$, $\sigma_\epsilon = 1.30$, $C_1 = 1.43$ dan $C_2 = 1.92$ (Launder and Spalding, 1974).

Kondisi Batas

Kondisi batas pada dasar.

Dianggap bahwa distribusi kecepatan di dekat dasar mengikuti hukum logaritma, yang dapat diekspresikan menurut persamaan:

$$\frac{u_w}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y_w}{k_s} \right) + B r \quad (7)$$

dimana u_w adalah kecepatan pada jarak y_w (titik grid hitungan terdekat) dari dasar, u_* adalah kecepatan gesek, k_s , kekasaran dasar, dan Br adalah konstanta integrasi, yang dapat diberikan dari grafik Nikuradse, yaitu grafik yang menyatakan hubungan antara Br dengan $\log(u_* k_s / \nu)$ [lihat Graf, 1984].

Energi kinetik turbulen, k_w , dan energi dissipasi, ϵ_w , di daerah dekat dasar dapat dievaluasi dengan persamaan berikut:

$$k_w = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \epsilon_w = \frac{u_*^3}{k y_w} \quad (8)$$

Kondisi batas pada muka air

Pengaruh muka air bebas (*free water surface*) dirumuskan secara empirik menurut persamaan:

$$\epsilon_f = \frac{C_f [k_f \sqrt{C_\mu}]^{3/2}}{k y_f} \quad (9)$$

dengan pertimbangan bahwa struktur turbulensi dekat permukaan mengalami perubahan (*dumping*). Dalam persamaan tersebut, ϵ_f dan $k_f (= u_*^2 / \sqrt{C_\mu})$, masing-masing adalah energi disipasi dan energi kinetik turbulen, y_f adalah jarak terdekat titik grid terhadap

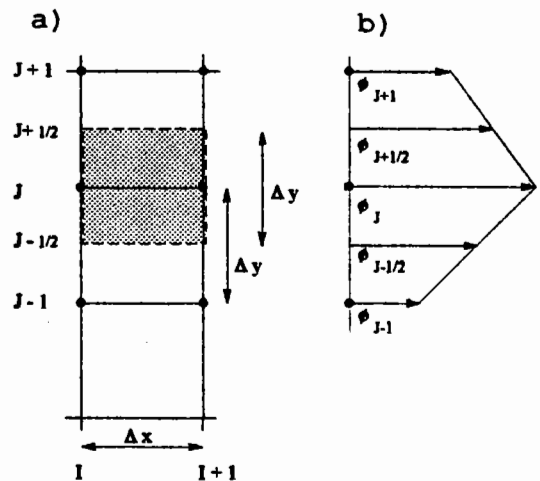
muka air, dan C_f adalah suatu angka konstan empirik $C_f = 0.164$ (Krishnappan, 1984).

PENYELESAIAN NUMERIS

Bentuk dari persamaan (3), (4), dan (5) adalah sama, dan dapat dituliskan ke dalam suatu bentuk persamaan umum yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial x} [u \phi] + \frac{\partial}{\partial y} [v \phi] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + S_\phi \quad (10)$$

Skema yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan ini adalah skema yang diusulkan oleh Patankar dan Spalding (1972). Menurut skema yang diusulkan oleh Patankar dan Spalding, pada bidang vertikal, persamaan diferensi hingga (*finite difference*) dari persamaan (10) dapat diperoleh dengan mengintegrasikan persamaan diferensial suku per suku pada suatu kontrol volume $\Delta x \Delta y$ seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 1. Kontrol volume dimana persamaan diferensial diintegrasikan diperlihatkan pada bidang yang diarsir.



Gambar 1 a) Kontrol volume dari skema *finite difference*

b) Asumsi profil untuk ϕ antara titik-titik grid

Pada Gambar 1, [I] adalah grid pada titik bagian hulu dimana penyelesaian dari ϕ diketahui, dan [I+1] adalah titik grid di bagian hilir, yang berjarak Δx dari grid bagian hulu, dimana nilai ϕ harus ditentukan. Jadi hitungan dilakukan dengan cara langkah per langkah (*step by step*) dari hulu ke arah hilir. Parameter-parameter [J-1] dan [J+1] adalah grid-grid pada arah vertikal, y . [J+1/2] dan [J-1/2] masing-masing adalah titik tengah antara titik [J] dan [J+1] dan antara titik [J] dan [J-1].

KONSENTRASI SEDIMEN SUSPENSII

Distribusi konsentrasi sedimen suspensi dapat diperoleh dari persamaan difusi untuk sedimen suspensi:

$$\Gamma \frac{\partial C}{\partial y} + w C = 0 \quad (11)$$

dimana C adalah konsentrasi sedimen suspensi, w : kecepatan endap partikel sedimen, Γ difusivity turbulen (*eddy diffusivity*), dan y sumbu vertikal. Integral dari persamaan (11) memberikan persamaan:

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left(\int_a^y \frac{1}{\Gamma} dy \right) \quad (12)$$

dimana C_a adalah konsentrasi referensi dari sedimen suspensi pada jarak $y = a$ dari dasar.

Dengan anggapan bahwa distribusi difusi turbulen, Γ , proporsional dengan viskositas turbulen, ν_t , yaitu:

$$\Gamma(y) = \beta \nu_t(y) \quad (13)$$

dimana β adalah suatu konstanta, $\beta = 1$, distribusi dari Γ dapat diperoleh, yaitu berdasarkan nilai ν_t hasil hitungan dari model matematika k- ϵ .

Untuk mengevaluasi konsentrasi referensi, C_a , digunakan suatu metoda yang diusulkan oleh Einstein, dimana menurut Einstein, transport bed-load terjadi pada suatu lapisan setebal $2 d_s$,

$$C_a = \frac{q_b}{(11.6 u_*')^2 d_s} \quad (14)$$

q_b dalam persamaan (14) adalah transpor *bed-load*, yang dapat ditentukan dengan rumus-rumus bed-load, seperti misalnya rumus Meyer-Peter & Muller, Einstein, Bagnold, dll, u_*' adalah kecepatan gesek karena pengaruh kekasaran dasar (Note: disamping pengaruh kekasaran, pengaruh "bed-form" dapat juga menimbulkan kecepatan gesek tambahan). Jadi tepat tidaknya prediksi distribusi konsentrasi sedimen suspensi (dengan model matematika k- ϵ) sangat dipengaruhi oleh rumus-rumus bed load (untuk menentukan C_a). Dalam tulisan ini, tidak dibahas rumus-rumus untuk hitungan bed-load; informasi yang lengkap tentang rumus-rumus bed-load dapat dilihat pada Graf (1984).

PROSEDUR HITUNGAN DAN PERBANDINGAN DENGAN DATA PENGUKURAN

Dengan menggunakan skema numerik yang didasarkan pada Gambar 1, persamaan 2 dan 3 dapat diselesaikan untuk memperoleh distribusi vertikal dari u dan v . Distribusi k dan ϵ selanjutnya dapat diperoleh dari persamaan 4 dan 5, yang kemudian dapat dipergunakan untuk menentukan distribusi viskositas turbulen, ν_t , berdasarkan persamaan 1. Untuk informasi yang lebih lengkap tentang prosedur hitungan dapat dilihat pada Kironoto (1992).

Data input yang diperlukan adalah data debit persatuan lebar, q , kedalaman aliran, D , kemiringan dasar saluran, S_0 , dan kekasaran dasar, k_s . Karena kekasaran dasar pada prinsipnya tidak diketahui, maka hitungan harus dilakukan dengan cara mencoba-coba harga k_s , sedemikian sehingga u_*' hasil hitungan dari model sama dengan u_*' hasil pengukuran atau hasil hitungan dengan rumus $u_*' = (g D S_0)^{1/2}$.

Mengingat model matematika dikembangkan pada aliran tanpa sedimen (dasar rata), dalam tulisan ini, sebelum model diaplikasikan pada aliran dengan sedimen (dasar bergelombang), model akan dibandingkan dengan data pengukuran tanpa sedimen (Kironoto dan Graf, 1994), yaitu untuk data distribusi kecepatan, tegangan geser, τ/ρ (Reynolds shear stress), dan distribusi viskositas turbulen, ν_t , yang diperoleh dari laboratorium Hidrolika, EPFL, Swiss. Pengukuran dilakukan pada saluran kaca, dengan dimensi saluran, panjang 16.8 m, lebar 0.6 m, dan tinggi, 1.0 m. Dasar saluran adalah *rough plate*, dengan diameter butiran rata-rata (butiran tidak lepas), $d_s = 5$ mm. Parameter utama dari data pengukuran yang dipergunakan untuk verifikasi diberikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Parameter utama dari data pengukuran tanpa sedimen (Kironoto and Graf, 1994))

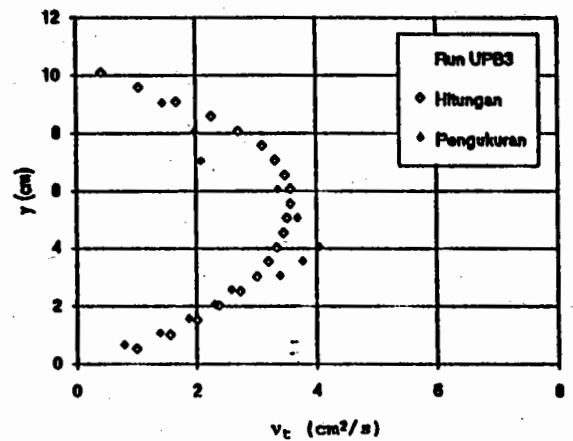
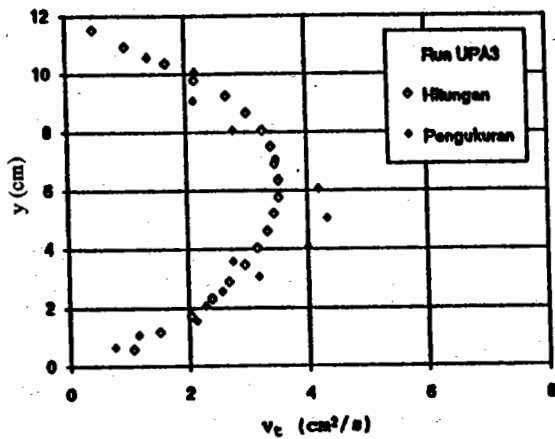
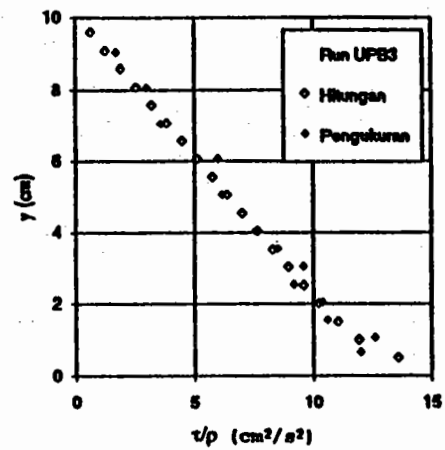
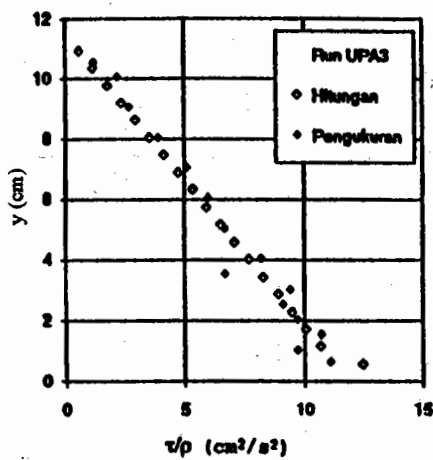
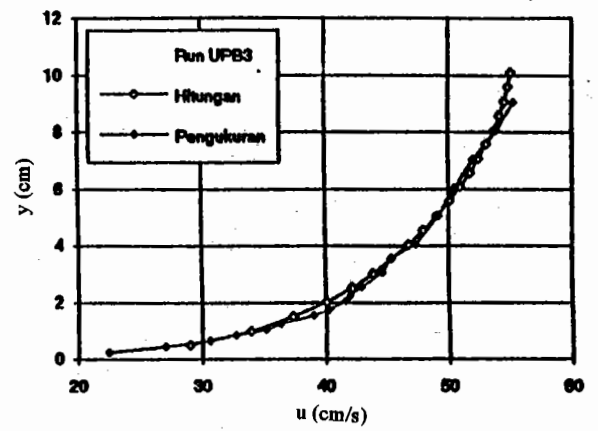
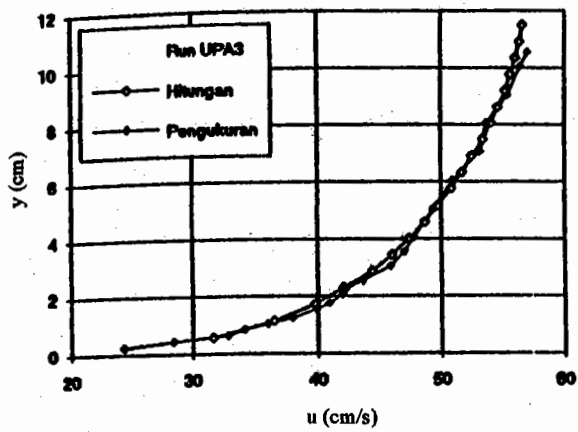
RUN	d_s (mm)	S_0 (-)	D (cm)	Q (l/s)	u_*' (cm/s)
UPA3	4.8	0.001	11.5	32	3.38
UPB3	4.8	0.00075	10.1	27	3.68

d_s = diameter butiran, S_0 - kemiringan dasar saluran, D - kedalaman air, Q - debit aliran, u_*' - kecepatan gesek.

Tampak pada Gambar 2 dan 3, bahwa distribusi kecepatan hasil hitungan dapat diprediksi dengan sangat memuaskan dengan model matematika k- ϵ , demikian halnya untuk distribusi tegangan geser Reynolds dan viskositas turbulen.

Untuk dapat menerapkan model matematika k- ϵ pada aliran dengan sedimen (dasar tidak rata), permasalahan yang perlu diperhatikan adalah menetapkan nilai kekasaran k_s dengan tepat, berkaitan dengan adanya dasar yang bergelombang. Untuk aliran tanpa sedimen dan dasar rata, nilai $k_s \approx d_s$, sementara untuk aliran dengan sedimen dan dasar tidak rata $k_s \neq d_s$.

Untuk membandingkan antara model dengan hasil pengukuran (data pengukuran dengan sedimen) digunakan data pengukuran dari laboratorium Hidrolika, Burlington, Ontario, Canada (Lau dan Krishnappan, 1985). Data pengukuran diperoleh dari saluran kaca dengan ukuran, panjang saluran, $L = 57.3$ m, lebar, $b = 0.756$ m, tinggi, $H = 0.29$ m. Material dasar (butiran lepas) yang digunakan adalah *Flex-O-Lite BT 10 glass beads*, dengan diameter rata-rata, $d_s = 0.15$ mm. Setelah aliran di Run, sebagian dari material dasar terangkut, dan terbentuk formasi dasar (*ripple*). Adapun parameter



Gambar 2. Distribusi kecepatan, tegangan geser, dan viskositas turbulen (Run UPA3)

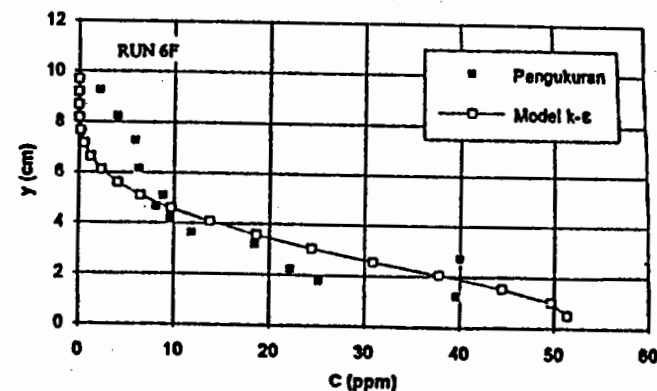
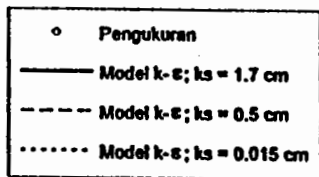
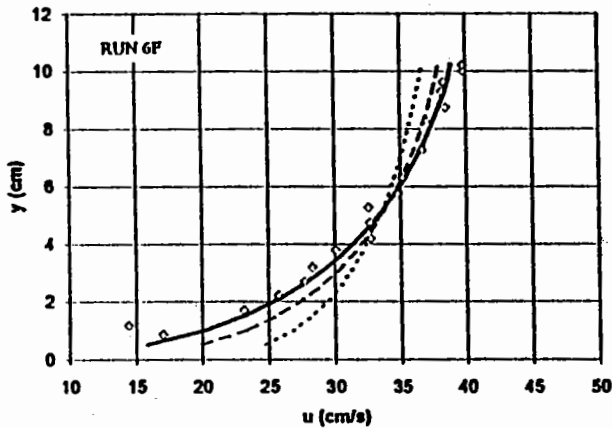
Gambar 3. Distribusi kecepatan, tegangan geser, dan viskositas turbulen (Run UPB3)

utama dari data pengukuran yang digunakan diberikan dalam Tabel 2.

Tabel 2. Parameter utama dari data pengukuran dengan sedimen (Lau dan Krishnappan, 1985)

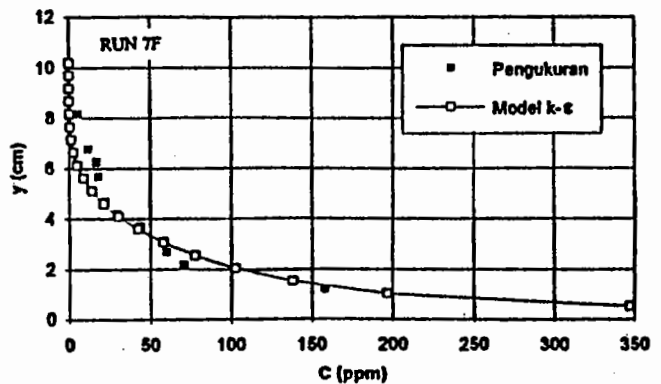
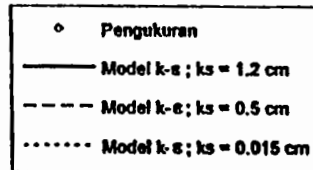
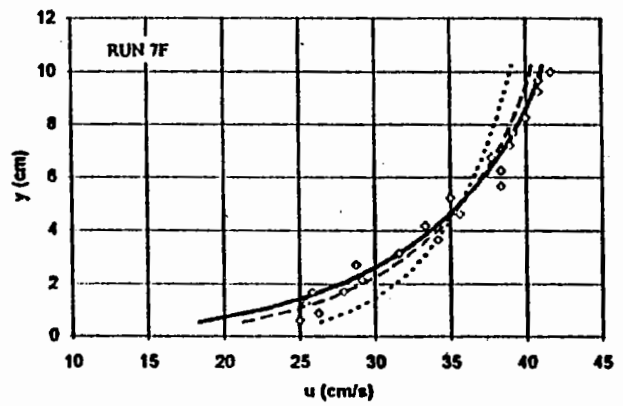
Run	d_s	S_o	D	Q	Δ	λ	u_*
	(mm)	(-)	(cm)	(m^3/s)	(cm)	(cm)	(cm/s)
6F	0.15	0.001	10.2	0.0252	1.62	10.1	3.16
7F	0.15	0.001	10.2	0.0268	1.32	9.4	3.17

d_s = diameter butiran, S_o - kemiringan dasar saluran, D - kedalaman air; Q - debit aliran, Δ dan λ = tinggi dan panjang ripple; u_* - kecepatan gesek.



Gambar 4. Distribusi kecepatan, dan konsentrasi sedimen suspensi (Run F6)

Dalam Gambar 3 dan 4, diperlihatkan distribusi kecepatan hasil pengukuran bersama dengan hasil hitungan dari model k-ε, dimana 3 jenis kurva hasil hitungan dari model matematika k-ε diperlihatkan dalam gambar, masing-masing untuk nilai-nilai k_s yang berbeda. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, dengan adanya angkutan dasar, konfigurasi dasar yang semula rata menjadi bergelombang (*ripple*). Dalam



Gambar 5. Distribusi kecepatan, dan konsentrasi sedimen suspensi (Run F7)

gambar ditunjukkan bahwa dengan nilai $k_s \approx d_s$, model tidak dapat memprediksi dengan baik data pengukuran, sementara dengan $k_s \approx \Delta$ (tinggi *ripple*, perbandingan antara data pengukuran dengan hasil hitungan cukup memuaskan. Dari sini dapat disimpulkan bahwa model matematika k-ε yang dikembangkan untuk aliran tanpa sedimen masih dapat dipergunakan untuk memprediksi distribusi kecepatan pada aliran dengan sedimen (dasar bergelombang), apabila $k_s \approx \Delta$.

Dengan menggunakan distribusi viskositas turbulen yang diperoleh dari model matematika k-ε (dengan $k_s \approx \Delta$), dan dengan menggunakan persamaan (12) [juga persamaan 13 dan 14], distribusi konsentrasi sedimen suspensi dapat diperoleh, seperti yang diperlihatkan dalam gambar yang sama (Gambar 3 dan 4). Perlu dicatat bahwa konsentrasi referensi, C_a , diperoleh dari persamaan (14), dimana angkutan dasar, q_b , ditentukan dengan rumus Bagnolds (tidak diperlihatkan dalam tulisan ini). Data pengukuran juga diperlihatkan dalam gambar, dimana perbandingan

antara data pengukuran dengan hasil hitungan cukup memuaskan.

KESIMPULAN DAN SARAN

Model matematika $k-\epsilon$ dapat dipergunakan untuk memprediksi struktur turbulen (distribusi kecepatan, tegangan geser Reynolds, dan viskositas turbulen) pada aliran tanpa sedimen (air jernih, dan dasar rata). Model yang sama dapat juga diterapkan pada aliran dengan sedimen. Apabila dasar bergelombang (*ripple*), nilai k_s yang digunakan adalah nilai k_s yang nilainya ekuivalen dengan tinggi gelombang (*ripple*). Hasil perbandingan antara data pengukuran (distribusi kecepatan dan distribusi konsentrasi sedimen suspensi) dengan hasil hitungan juga cukup memuaskan.

Dalam tulisan ini, model hanya diterapkan/diverifikasi pada aliran yang diperoleh di laboratorium, untuk aplikasinya di lapangan, model masih perlu diverifikasi atau dikalibrasi, dengan kemungkinan mengubah koefisien-koefisien empiris yang ada dalam persamaan-persamaan yang digunakan

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Dr. W.H Graf, atas informasi data yang dipergunakan dalam tulisan ini, juga Dr. B.G. Krishnappan, atas informasi data dan bantuannya dalam menerapkan model matematika $k-\epsilon$ ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Graf, W.H., 1984, *Hydraulics of Sediment Transport*; Water Resources Publ., USA.
- Kironoto, B., 1992, "Turbulence characteristics of uniform and non-uniform, rough open-channel flow"; Doctoral Dissertation, No. 1094, Ecole Polytechnique Fiderale, Lausanne, Switzerland.
- Kironoto, B., 1994, "Model matematika $k-\epsilon$ untuk aliran turbulen dalam saluran terbuka." Penelitian dengan dana DPP 1993/1994, FT UGM, Yogyakarta.
- Kironoto, B. and Graf, W. H., 1994, "Turbulence characteristics in rough uniform open-channel flow." Inst. Civ. Enggr, Marit. & Energy, London, GB, 106(4), pp.333-344.
- Krishnappan, B. G., 1984, "Laboratory Verification of Turbulent Flow Model." J. Hydr. Engrg., ASCE, 110(4), pp. 500-514.
- Lau, Y. L. and Krishnappan, B. G., 1985, "Sediment transport under ice cover." J. Hydr. Engrg., ASCE, 111(6), pp. 934-950.
- Launder, B.E. and Spalding, D.B., 1974, "The numerical calculation of turbulent flows." Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3, pp. 269-289.
- Patankar, S. V. and Spalding, D. B., 1970, *Heat and mass transfer in boundary layers*. Intertext Publishers, London, Great Britain.